www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

INSTITUT NATIONAL DE LA STATISTIQUE ET DES ETUDES ECONOMIQUES

ECOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ADMINISTRATION ECONOMIQUE

CONCOURS POUR L'ADMISSION D'ELEVES TITULAIRES STATISTICIENS ECONOMISTES

OPTION MATHEMATIQUES — MAI 1989

DEUXIEME COMPOSITION DE MATHEMATIQUES — (Durée : 4 heures)

On notera $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers naturels non nuls. On notera Id la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $Id(x) = x$. Si f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et si $f(x) > 0$ pour tout réel x, on écrira $f > 0$. Enfin si $\lambda \in \mathbb{R}$ on définit $f+\lambda$ par $(f+\lambda)(x) = f(x) + \lambda$.

I - DEFINITION DU NOMBRE DE ROTATION

On définit $\mathcal{X} = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, f continue, strictement croissante, vérifiant $f(x+1) = f(x) + 1$, pour tout réel x$\}$.

1 - a) Montrer que si f appartient à $\mathcal{X}$ alors f est bijective et son inverse f^{-1} pour la loi de composition appartient également à $\mathcal{X}$.

b) Montrer que si f et g appartiennent à $\mathcal{X}$, il en est de même de fog.

c) En déduire que $\mathcal{X}$ est un groupe pour la loi de composition.

d) Montrer que si $f \in \mathcal{X}$ et si $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $f-\lambda \in \mathcal{X}$.

Si $f \in \mathcal{X}$ et $k \in \mathbb{Z}$, on définit f^k de la façon suivante : $f^0 = Id$; $f^{k+1} = fof^k \ \forall k \in \mathbb{N}$, et $f^{-k} = (f^k)^{-1} \ \forall k \in \mathbb{N}$.

Calculer $(f - p)^q$, pour $f \in \mathcal{X}$, $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$.

2 - Soit f un élément de $\mathcal{X}$; on définit l'application $\varphi = f-Id$.

a) Montrer que φ est périodique et bornée.

b) On pose $M = \sup_{x \in \mathbb{R}} \varphi(x)$; $m = \inf_{x \in \mathbb{R}} \varphi(x)$.

Montrer : $0 \leqslant M-m < 1$.

3 - Montrer que pour tout $f \in \mathcal{X}$ et pour tout $q \in \mathbb{N}$ on a :

$$q \inf_{x \in \mathbb{R}} \{f(x)-x\} \leqslant \inf_{x \in \mathbb{R}} \{f^q(x)-x\} \leqslant \sup_{x \in \mathbb{R}} \{f^q(x)-x\} \leqslant q \sup_{x \in \mathbb{R}} \{f(x)-x\}$$

000/...

4 - On définit les ensembles :

$$\mathcal{K}_0^+ = \{f \in \mathcal{K} \ ; \ f\text{-Id} > 0\}$$

$$\mathcal{K}_0^- = \{f \in \mathcal{K} \ ; \ f\text{-Id} < 0\}$$

$$\mathcal{K}_0 = \{f \in \mathcal{K} \ ; \ \exists x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = x\}$$

Montrer que la famille $\left\{\mathcal{K}_0^+, \mathcal{K}_0^-, \mathcal{K}_0\right\}$ définit une partition de $\mathcal{K}$. (Il faudra montrer en particulier qu'aucun de ces sous-ensembles n'est vide.)

5 - Soit $f \in \mathcal{K}$. Montrer les équivalences suivantes :

$$f \in \mathcal{K}_0^+ \iff \forall x \in \mathbb{R} \quad \lim_{n \to +\infty} f^n(x) = +\infty \qquad (a)$$

$$\iff \exists q \in \mathbb{N}^* \qquad f^q\text{-Id} > 0 \qquad (b)$$

$$f \in \mathcal{K}_0^- \iff \forall x \in \mathbb{R} \quad \lim_{n \to +\infty} f^n(x) = -\infty \qquad (c)$$

$$\iff \exists q \in \mathbb{N}^* \qquad f^q\text{-Id} < 0 \qquad (d)$$

$$f \in \mathcal{K}_0 \iff \exists x \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad f^n(x) = x \qquad (e)$$

$$\iff \exists q \in \mathbb{N}^* \quad \exists x \in \mathbb{R} \quad f^q(x) = x \qquad (f)$$

6 - Soit ρ un nombre rationnel qui s'écrit $\rho = \frac{p}{q}$ où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$. On définit :

$$\mathcal{K}_\rho^+ = \left\{f \in \mathcal{K} \ ; \ f^q\text{-}p \in \mathcal{K}_0^+\right\}$$

$$\mathcal{K}_\rho^- = \left\{f \in \mathcal{K} \ ; \ f^q\text{-}p \in \mathcal{K}_0^-\right\}$$

$$\mathcal{K}_\rho = \left\{f \in \mathcal{K} \ ; \ f^q\text{-}p \in \mathcal{K}_0\right\}$$

a) Vérifier que la définition de ces ensembles est indépendante de l'écriture de ρ sous la forme du quotient d'un entier relatif par un entier strictement positif.

b) Montrer que : $\left\{\mathcal{K}_\rho^+, \mathcal{K}_\rho^-, \mathcal{K}_\rho\right\}$ définit une partition de $\mathcal{K}$.

7 - a) Montrer que si $\rho \in \mathbb{Q}$ et $\rho' \in \mathbb{Q}$ vérifient $\rho < \rho'$, alors :

$$(\mathcal{K}_\rho^- \cup \mathcal{K}_{\rho'}) \subset \mathcal{K}_\rho^- \quad \text{et} \quad (\mathcal{K}_\rho \cup \mathcal{K}_{\rho'}) \subset \mathcal{K}_{\rho'}^+$$

b) Montrer que si f appartient à $\mathcal{K}$, il existe un unique réel noté $\rho(f)$ tel que :

$$\rho \in \mathbb{Q} \cap]-\infty, \rho(f)[\implies f \in \mathcal{K}_\rho^+.$$

$$\rho \in \mathbb{Q} \cap]\rho(f), +\infty[\implies f \in \mathcal{K}_\rho^-.$$

Le nombre $\rho(f)$ sera appelé le nombre de rotation de f.

8 - a) Montrer que si $\rho \in \mathbb{Q}$ et si $f \in \mathcal{K}_\rho$ alors $\rho(f) = \rho$.

b) Montrer que si $\rho(f) \in \mathbb{Q}$ alors $f \in \mathcal{K}_{\rho(f)}$.

9 - Montrer les relations :

a) $\forall k \in \mathbb{Z}, \ \forall x \in \mathbb{R}, \quad -1 < f^k(x) - x - k\rho(f) < 1$

b) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{k \to +\infty} \frac{f^k(x)}{k} = \lim_{k \to -\infty} \frac{f^k(x)}{k} = \rho(f)$

II - <u>PROPRIETES DES NOMBRES DE ROTATION</u>

1 - Montrer que l'application $t_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to t_\lambda(x) = x + \lambda$ appartient à $\mathcal{K}$ et calculer $\rho(t_\lambda)$.

2 - Montrer que pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et pour tout $f \in \mathcal{K}$:

- $\rho(f^k) = k\,\rho(f)$,
- $\rho(f+k) = \rho(f) + k$.

3 - Montrer que si $f \in \mathcal{K}$ et $g \in \mathcal{K}$ vérifient $f(x) \leq g(x)$ pour tout réel x, alors $\rho(f) \leq \rho(g)$.

4 - Montrer que si $f \in \mathcal{K}$ et $h \in \mathcal{K}$ alors $g = hofoh^{-1} \in \mathcal{K}$ et $\rho(g) = \rho(f)$.

5 - a) Montrer que si les suites $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{K}$ convergent uniformément respectivement vers $f \in \mathcal{K}$ et vers $g \in \mathcal{K}$, alors $(f_n o g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers fog.

b) Montrer que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de $\mathcal{K}$ convergeant uniformément vers $f \in \mathcal{K}$, alors $(\rho(f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\rho(f)$.

ECOLE NATIONALE de l'ADMINISTRATION ECONOMIQUE
M.-Math 2
page 131
1989 2

III - ETUDE DES ITERES D'UN POINT

On se fixe dans cette partie un élément f de $\mathcal{K}$ et on note $\rho = \rho(f)$ son nombre de rotation.

1 - Montrer que si ρ est rationnel et s'écrit $\rho = \frac{p}{q}$ (où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$) et si $F = f^q - p$, alors pour tout réel x les suites $(F^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(F^{-n}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones et convergent chacune vers un point fixe de F.

On supposera jusqu'à la fin de cette partie que ρ est irrationnel et on fixe un réel x_0.

2 - On définit les deux parties de $\mathbb{R}$ suivantes :

$$\Lambda = \{p + q\rho \ , \ (p,q) \in \mathbb{Z}^2\},$$

et $$\Lambda' = \left\{f^q(x_0) + p, \quad (p,q) \in \mathbb{Z}^2\right\}.$$

a) Montrer que les applications $I : \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \longrightarrow \Lambda$, $(p,q) \longrightarrow p+q\rho$

et $I' : \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \longrightarrow \Lambda'$, $(p,q) \longrightarrow f^q(x_0) + p$ sont bijectives.

b) Montrer que l'application : $g = I' \circ I^{-1}$ est une bijection strictement croissante de Λ sur Λ'. On note $h = g^{-1}$.

3 - a) Montrer que l'ensemble $\Lambda \cap [0,1[$ est infini.

b) Montrer que pour tout réel $\varepsilon > 0$, $\Lambda \cap]0,\varepsilon[$ est non vide.

c) Montrer que Λ est dense dans $\mathbb{R}$.

4 - On définit l'application $\bar{h} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ par la relation : $\bar{h}(x) = \sup\{h(y) \mid y \in \Lambda' \cap]-\infty,x]\}$.

a) Montrer que $\bar{h}$ est croissante, continue et coïncide avec h sur Λ'.

b) Montrer que pour tout réel x : $\begin{cases} \bar{h}(x+1) = \bar{h}(x) + 1 \\ \bar{h}(f(x)) = \bar{h}(x) + \rho \end{cases}$.

5 - Montrer que si Λ' est dense dans $\mathbb{R}$ alors $\bar{h}$ est un élément de $\mathcal{K}$.

IV - RELEVEMENT D'HOMEOMORPHISMES DU CERCLE S

Soit S le cercle unité dans $\mathbb{C}$, ensemble des $e^{2i\pi x}$ quand x parcourt $\mathbb{R}$. On munit S de sa topologie usuelle et on considère un homéomorphisme F de S et deux réels x_0 et x_0' tels que $F\left(e^{2i\pi x_0}\right) = e^{2i\pi x_0'}$.

On admettra que pour tout $y \in \mathbb{R}$, l'application $\psi : x \longrightarrow e^{2i\pi x}$ définit un homéomorphisme de $]y,y+1[$ sur $S \setminus \{e^{2i\pi y}\}$ (c'est-à-dire S privé de $e^{2i\pi y}$).

1 - Montrer que pour tout $x \in]x_0,x_0+1[$ il existe un unique réel x' dans $]x_0',x_0'+1[$ tel que $F(e^{2i\pi x}) = e^{2i\pi x'}$. On pose alors $x' = f(x)$. Montrer que la fonction ainsi définie de $]x_0,x_0+1[$ dans $]x_0',x_0'+1[$ est continue et strictement monotone.

2 - Montrer que f se prolonge par continuité sur $[x_0,x_0+1]$ et que $f(x_0+1)$ est égal soit à $f(x_0)+1$ soit à $f(x_0)-1$.

3 - Montrer que l'on peut prolonger f de manière unique en une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant : (1) : $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(e^{2i\pi x}) = e^{2i\pi f(x)}$

4 - Une telle application f est appelée un relèvement de F. Montrer que l'on a l'une ou l'autre des propositions suivantes :

(2) : f est strictement croissante et $f(x+1) = f(x)+1$ pour tout réel x

(3) : f est strictement décroissante et $f(x+1) = f(x)-1$ pour tout réel x.

5 - Réciproquement montrer que si f est une application continue vérifiant (2) ou (3), alors il existe un unique homéomorphisme de S vérifiant (1).

6 - Montrer que si f est un relèvement de F et si $p \in \mathbb{Z}$ alors :

a) f^p est un relèvement de F^p,

b) $f+p$ est relèvement de F.

7 - Soit F un homéomorphisme de S admettant un relèvement f vérifiant (2), donc appartenant à $\mathcal{K}$. En utilisant les parties précédentes, montrer :

a) Si $\rho(f)$ est rationnel, F admet un point périodique, c'est-à-dire : $\exists x \in S$, $\exists q \in \mathbb{N}^*$, $F^q(x) = x$.

b) Si $\forall x \in S$, $\{F^k(x) \ / \ k \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans S, alors il existe un homéomorphisme H de S, tel que $F = H^{-1} \circ R_\alpha \circ H$, où R_α est la rotation d'angle $2\pi\alpha$, et α est irrationnel.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail